

BÀI TẬP CHƯƠNG III

77. Tìm phần nguyên của các số:

a) $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$ (có n dấu căn);

b) $a_n = \sqrt{4 + \sqrt{4 + \cdots + \sqrt{4 + \sqrt{4}}}}$ (có n dấu căn);

c) $a_n = \sqrt{1996 + \sqrt{1996 + \cdots + \sqrt{1996 + \sqrt{1996}}}}$ (có n dấu căn);

78. Tìm phần nguyên của A với n là số tự nhiên: $A = \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3}}$.

79. Tìm chữ số tận cùng của phần nguyên của $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{250}$.

80. Giải phương trình $[x^2] + [x] = \{x\} + 2$, trong đó kí hiệu $\{x\}$ là phần lẻ của x , tức là $\{x\} = x - [x]$.

81. Giải phương trình: $3\left[\frac{x}{2}\right]^2 + 5\left[\frac{x}{2}\right] = 2$.

82. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1,1 \\ y + [z] + \{x\} = 2,2 \\ z + [x] + \{y\} = 3,3 \end{cases}$$

83. Chứng minh rằng $[2x]$ bằng $2[x]$ hoặc $2[x] + 1$.

84. Tính tổng $A = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \cdots + [\sqrt{24}]$.

85. Cho số nguyên dương a . Xét tất cả các số dạng:

$$a + 15, a + 30, a + 45, \dots, a + 15n, \dots$$

Chứng minh rằng trong các số đó, tồn tại hai số mà hai chữ số đầu tiên là 96.

86. Tính $\tau(n), \sigma(n)$ với:

a) $n = 1998$.

b) $n = 2000$.

87. Chứng minh rằng số tự nhiên $n > 1$ là nguyên tố khi và chỉ khi $\sigma(n) = n + 1$.

88. Biết dạng phân tích tiêu chuẩn $m = p^\alpha q^\beta$ và $\tau(m^2) = 15$. Tính $\tau(m^3)$.

89. Tìm các số tự nhiên n có phân tích tiêu chuẩn $n = 2^\alpha 3^\beta$ và $\sigma(n) = 403$.

90. Tìm các số tự nhiên n có dạng phân tích tiêu chuẩn $n = 3p^2$ và $\sigma(n) = 124$.

91. Tìm tất cả các số hoàn chỉnh n có dạng phân tích tiêu chuẩn $n = 2^4 p$.

92. Tìm tất cả các số hoàn chỉnh n có dạng phân tích tiêu chuẩn $n = pq$.

93. Tìm tất cả các số hoàn chỉnh n có dạng phân tích tiêu chuẩn $n = p^2 q$.

94. Chứng minh rằng không có số hoàn chỉnh dạng $n = p^\alpha$, ở đó p là một số nguyên tố.

95. Tìm hai số m, n có dạng $2^\alpha 3^\beta$ có UCLN bằng 18 và $\tau(m) = 21, \tau(n) = 10$.

96. Chứng minh rằng không tồn tại số hoàn chỉnh có dạng phân tích tiêu chuẩn là $p^3 q$.

97. Giả sử n là một số nguyên lớn hơn 1 và p là một số nguyên tố. Ta gọi $v_p(n)$ là số mũ của p trong phân tích tiêu chuẩn của n . Chứng minh rằng:

a) $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$.

b) $m : n \Leftrightarrow v_p(m) \geq v_p(n), \forall p$ nguyên tố. Khi đó $v_p\left(\frac{m}{n}\right) = v_p(m) - v_p(n)$.

c) $v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k} \right]$.

98. a) Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố sao cho $2^p - 1$ là số nguyên tố thì $E_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ là số hoàn chỉnh. Hãy tính E_2, E_3, E_5 .

b) Chứng minh rằng mọi số hoàn chỉnh chẵn đều có dạng E_p (E_p gọi là số Öclit thứ p).